Podstawy nauk przyrodniczych
Matematyka

Zbiory

dr Katarzyna Kluzek

Zakład Genetyki Molekularnej Człowieka
tel. 61 829 58 33
katarzyna.kluzek@amu.edu.pl
Pokój 1.117
http://dhmg.amu.edu.pl/

Definicja zbioru

- Zbiór to kolekcja niepowtarzających się obiektów, bez wyróżnionej kolejności, nazywanych elementami zbioru.
- Zbiory oznaczamy dużymi literami, a ich elementy - małymi.
- Fakt, że obiekt a należy do zbioru A zapisujemy jako $a \in A$.
- Fakt, że obiekt a nie należy do zbioru A zapisujemy jako $a \notin A$.

Szczególne zbiory

- Zbiór, do którego nie należy żaden element nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy $\emptyset$ lub $\varnothing$.
- Przestrzeń to zbiór, który zawiera wszystkie interesujące nas elementy z pewnej dziedziny.

  Przestrzeń oznaczamy symbolem Ω.

Określanie zbioru

- Wymieniamy wszystkie elementy zbioru:

$$\mathrm{A} = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{B} = \{\mathrm{kwas}, \mathrm{zasada}, \mathrm{ester}\}$$

- Podajemy własności, które spełniają wszystkie elementy zbioru:

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} : \mathrm{x} \bmod 2 = 0\},\ \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : \mathrm{x}^2 < 4\}$$

Dodawanie zbiorów

- Niech będą dane dwa dowolne zbiory A oraz B. Sumą $A \cup B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór, do którego należy każdy element zbioru A i każdy element zbioru B.
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5\}$, to
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$, to
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Różnica zbiorów

- Niech będą dane dwa dowolne zbiory A oraz B. Różnicą $A - B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór, do którego należy każdy element zbioru A, który nie jest elementem zbioru B.
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5\}$, to
$$A - B = \{1, 2, 3\}.$$
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to
$$A - B = \emptyset.$$
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$, to
$$A - B = \{1\}.$$

Iloczyn zbiorów

- Niech będą dane dwa dowolne zbiory A oraz B. Iloczynem $A \cap B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór, do którego należy każdy element zbioru A, który jest elementem zbioru B.
  Iloczyn zbiorów, to ich **część wspólna**.
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5\}$, to
$$A \cap B = \emptyset.$$
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to
$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$, to
$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów

- Iloczyn kartezjański zbiorów A i B to zbiór wszystkich takich par uporządkowanych (a, b), że $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ i $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$.
- Przykład:

$$\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$$
$$\mathrm{B} = \{\mathrm{y}, \mathrm{z}\}$$
$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(1, \mathrm{y}), (1, \mathrm{z}), (2, \mathrm{y}), (2, \mathrm{z}), (3, \mathrm{y}), (3, \mathrm{z})\}.$$

Dopełnienie zbioru

- Niech będą dane dwa dowolne zbiory Ω oraz A. Dopełnieniem A' zbioru A nazywamy różnicę $\Omega - A$.
- Jeżeli $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $A = \{1, 2\}$, to
$$A' = \{3, 4, 5, 6\}.$$
- Jeżeli $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{1, 3, 5\}$, to
$$B' = \{2, 4, 6\}.$$

Podzbiory

- Niech będą dane dwa dowolne zbiory A oraz B. Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, jeżeli każdy element zbioru A jest jednocześnie elementem zbioru B. Fakt, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B zapisujemy $A \subseteq B$.
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5\}$, to A nie jest podzbiorem B.
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to $A \subseteq B$.
- Jeżeli $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$, to A nie jest podzbiorem B.

Moc zbioru

- jest miarą liczby elementów w zbiorze. W przypadku zbiorów skończonych, moc zbioru jest równa liczbie jego elementów. Nieformalnie, im większa moc zbioru tym większy jest zbiór.
- Moc zbioru A oznaczamy |A|.

Przykłady

- Zbiór liczb naturalnych $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Zbiór liczb całkowitych $\mathrm{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Zbiór liczb wymiernych $\mathrm{Q} = \{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ takich, że m i $\mathrm{n} \in \mathrm{Z}$ oraz $\mathrm{n} \neq 0\}$.
- Zbiór liczb rzeczywistych R.

Dodawanie i odejmowanie

- Dodawanie oznaczamy symbolem $+$.
- Własności dodawania:
  - Przemienność:
    $$a + b = b + a.$$
  - Dodawanie 0:
    $$a + 0 = 0 + a = a.$$
- Odejmowanie oznaczamy symbolem $-$.
- Własności odejmowania:
  $$a - 0 = a.$$
  $$0 - a = -a.$$

Mnożenie

- Mnożenie oznaczamy symbolem $\cdot$.
- Właściwości mnożenia:
    - Przemienność:
    $$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}.$$
    - Rozdzielność względem dodawania:
    $$\mathrm{a} \cdot (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}.$$
    - Mnożenie przez 0 i 1:
    $$\mathrm{a} \cdot 0 = 0.$$
    $$\mathrm{a} \cdot 1 = \mathrm{a}.$$

Dzielenie

- Dzielenie oznaczamy symbolem :.
- Właściwości dzielenia:
    - Nie dzielimy przez 0.
    - Dzielenie liczby a przez 1:
      $$\mathrm{a} : 1 = \mathrm{a}.$$
    - Dzielenie liczby a przez a:
      $$\mathrm{a} : \mathrm{a} = 1.$$

Ułamki

- Ułamkiem nazywamy dowolne wyrażenie postaci $\frac{a}{b}$, przy czym $b \neq 0$.
- Dowolną liczbę całkowitą k możemy przedstawić jako ułamek $\frac{k}{1}$.
- Ułamki należą do zbioru liczb wymiernych i do zbioru liczb rzeczywistych.

Działania na ułamkach

- Weźmy pod uwagę dwa ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ i stałą $k \neq 0$.
  - Dodawanie ułamków:
  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$
  - Odejmowanie ułamków:
  $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$
  - Mnożenie ułamków:
  $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$
  - Dzielenie ułamków:
  $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$
  - Mnożenie ułamka przez liczbę:
  $$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{1b} = \frac{ka}{b}.$$

Potęgowanie

- Niech $a \in R$, $m \in N$, $m > 0$:
  - $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ razy}}$.
  - $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.
  - $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$.
- Właściwości potęgowania $(a, m, n \in R)$:
  - $a^0 = 1$.
  - $a^1 = a$.
  - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
  - $a^m : a^n = a^{m-n}$.
  - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Logarytm

- Niech $a > 0$, $b > 0$ i c będą liczbami rzeczywistymi.
- Logarytmem przy podstawie a z liczby b nazywamy taką liczbę c, że podstawa a podniesiona do potęgi c daje liczbę b:

$$\log_a b = c \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^c = b.$$

- Właściwości logarytmu:
  - $\log_a 1 = 0$.
  - $\log_a a = 1$.
  - $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.
  - $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
  - $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$.
  - $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
  - $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$.

Kolejność wykonywania działań

- Najpierw wykonujemy działania w nawiasach.
- Logarytm i potęgowanie.
- Mnożenie i dzielenie.
- Dodawanie i odejmowanie.
- Działania równorzędne wykonujemy od lewej do prawej.

Dziękuję za uwagę

Zakład Genetyki Molekularnej Człowieka
tel. 61 829 58 33
katarzyna.kluzek@amu.edu.pl
Pokój 1.117
http://dhmg.amu.edu.pl/