Podstawy nauk przyrodniczych
Matematyka

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

dr inż. Małgorzata Szeląg

Zakład Genetyki Molekularnej Człowieka
tel. 61 829 59 04
malgorzata.szelag@amu.edu.pl
Pokój 1.118
http://dhmg.amu.edu.pl/

- Doświadczenie losowe to czynność lub zestaw czynności, które spełniają następujące warunki:
  - Można je dowolnie wiele razy powtórzyć.
  - Można określić wszystkie możliwe wyniki tych czynności i zdefiniować ich zbiór
  - Konkretnego wyniku nie można z góry przewidzieć.
- Przykłady doświadczeń losowych:
  - 2 rzuty monetą.
  - Rzut sześcienną kostką do gry.

- Zdarzenie elementarne ω to wynik doświadczenia losowego:
  - $\omega = \langle \mathrm{R}, \mathrm{R} \rangle$.
  - $\omega = 5$.
- Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych i oznaczamy symbolem Ω.
  - $\Omega = \{\langle \mathrm{O}, \mathrm{O} \rangle, \langle \mathrm{O}, \mathrm{R} \rangle, \langle \mathrm{R}, \mathrm{R} \rangle, \langle \mathrm{R}, \mathrm{O} \rangle\}$.
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Zdarzenie losowe A to dowolny podzbiór zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω:
  - $\mathrm{A} = \{\langle \mathrm{O}, \mathrm{R} \rangle\}$.
  - $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$.
- Dwa zdarzenia losowe A i B się wykluczają, jeżeli $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

- Zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu losowemu A, to zdarzenie elementarne, które należy do zbioru A. Gdy $A = \{2, 4, 6\}$, to A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
  - 2.
  - 4.
  - 6.

- Przez $A' = \Omega - A$ oznaczamy zdarzenie losowe przeciwne do zdarzenia A:
  - $A' = \{\langle O, O\rangle, \langle R, R\rangle, \langle R, O\rangle\}$.
  - $A' = \{1, 3, 5\}$.

Zadanie 1

- Rzucamy trzy razy monetą.
  - Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.
  - Niech A oznacza zdarzenie losowe: wypadło więcej reszek niż orłów. Napisz zdarzenie A.
  - Napisz zdarzenie A'.

Zadanie 2

- Losujemy bez zwracania dwie cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i tworzymy z nich liczbę.
  - Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.
  - Niech A oznacza zdarzenie losowe: wylosowaliśmy cyfry, które dały liczbę parzystą. Napisz zdarzenie A.
  - Napisz zdarzenie A′.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

- Założenie: wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne .
- Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia losowego A nazywamy stosunek liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|},$$

Przykład

- Obliczmy prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch albo czterech oczek na idealnej kostce sześciennej:
  - $A = \{2, 4\}$, czyli $|A| = 2$.
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli $|\Omega| = 6$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Zadania 3 i 4

- Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3, przy założeniu, że prawdopodobieństwo wylosowania każdej liczby jest takie samo.
- Rzucamy dwa razy idealną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
  - W obu rzutach reszki.
  - Za pierwszym rzutem orła.
  - W obu rzutach tego samego wyniku.

Zadania 5 i 6

- W klasie jest 10 dziewczyn. Losujemy z tej klasy ucznia. Prawdopodobieństwo, że będzie to chłopiec wynosi $\frac{2}{3}$. Ilu jest chłopców w tej klasie?
- Rzucamy dwa razy idealną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
  - Parzystej liczby oczek w obu rzutach.
  - Parzystej liczby oczek w pierwszym rzucie.
  - Sumy oczek równej 5.
  - Różnych liczb oczek w obu rzutach.

Zadanie 7

- W pojemniku są kule białe i czarne. Prawdopodobieństwo wylosowania z pojemnika jednej kuli białej jest równe $\frac{3}{7}$. Jeżeli dołożymy jedną białą kulę, prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej wzrośnie do $\frac{1}{2}$. Ile kul białych a ile czarnych jest w pojemniku?

Aksjomatyczna definicja prawdopobieństwa

- Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu zdarzeniu losowemu $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\mathrm{P(A)}$ tak, aby spełnione były warunki:
  - $\mathrm{P(A)} \geqslant 0$.
  - $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
  - Dla dwóch dowolnych zdarzeń losowych A i B, takich że $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ zachodzi:
    $$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

Własności prawdopodobieństwa

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) \leqslant 1$
- Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.
- $P(A) + P(A') = 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadanie 8

- Niech A i B oznaczają zdarzenia losowe, przy czym $P(A) = 0.6$ i $P(B) = 0.2$. Wiemy, że $B \subseteq A$.
  - Znajdź $P(A \cup B)$ i $P(A \cap B)$.
- Niech A i B oznaczają zdarzenia losowe, przy czym $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ i $P(A \cup B) = 0.5$.
  - Oblicz $P(A')$, $P(B')$, $P(A \cap B)$ i $P(A - B)$.

Zadanie 9

- Oblicz $\mathrm{P(A)}$, jeżeli $\mathrm{P(A')} = 2\mathrm{P(A)}$.
- Prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A i A′ są równe. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest trzy razy mniejsze niż prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B′. Zdarzenia A i B są rozłączne. Oblicz $\mathrm{P(A \cup B)}$.

Zadanie 10

- Strzelając do tarczy strzelec uzyskuje co najmniej 9 punktów z prawdopodobieństwem 0.5, a co najwyżej 9 punktów z prawdopodobieństwem 0.7.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że ten strzelec uzyska dokładnie 9 punktów.

Prawdopodobieństwo warunkowe

- Rzucamy idealną kostką sześcienną. Niech $A = \{2, 4\}$ i $B = \{2, 4, 6\}$.
  - Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzeń A oraz B?
  - Wiemy, że zaszło zdarzenie B. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo, że zaszło zdarzenie A?

Prawdopodobieństwo warunkowe

- Zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B definiujemy następująco:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$
- $P(A|B)$ jest zazwyczaj różne od $P(A)$, gdyż informacja, że zaszło zdarzenie B ma wpływ na ocenę prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A.

Prawdopodobieństwo warunkowe

- Rzucamy idealną kostką sześcienną. Niech $\mathrm{A} = \{2, 4\}$ i $\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$. Wiemy, że zaszło zdarzenie B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zaszło zdarzenie A?

  $$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}.$$

  Ponieważ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} = \{2, 4\}$, to $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Z kolei $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Stąd $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

Niezależność zdarzeń

- Rzucamy idealną kostką sześcienną. Niech $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
  - Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzeń A oraz B?
  - Wiemy, że zaszło zdarzenie B. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo, że zaszło zdarzenie A?

Niezależność zdarzeń

- Dwa zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli informacja o tym że zaszło zdarzenie losowe B, nie ma wpływu na ocenę prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A, czyli:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}).$$

Ponieważ $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$, mamy:

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \mathrm{P}(\mathrm{A}).$$

Stąd dla dwóch niezależnych zdarzeń losowych A i B otrzymujemy:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

Próbą Bernoulliego

- Nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z tych wyników nazywamy sukcesem, a drugi porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p, to prawdopodobieństwo porażki $q = 1 - p$.
- Jako przykład może posłużyć rzut idealną monetą. Wówczas $p = q = \frac{1}{2}$.

Schematem Bernoulliego

- Nazywamy ciąg n niezależnych powtórzeń prób Bernoulliego.
- W schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w n próbach można obliczyć ze wzoru:

$$\mathrm{P_n(k)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{p^k} \cdot \mathrm{q^{n-k}},$$

gdzie $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{k!\cdot(n-k)!}}$.

Przykład

- Rzucamy 10 razy idealną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia losowego: wypadnie dokładnie siedem orłów?
- Sukcesem jest tu wyrzucenie orła. Ponieważ moneta jest idealna, $p = q = \frac{1}{2}$. Mamy 10 prób, więc $n = 10$. Pytamy o prawdopodobieństwo otrzymania siedmiu orłów, czyli $k = 7$.
- $P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{2}^7 \cdot \frac{1}{2}^3 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{8}$.
  $P_n(k) = 120 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{120}{1024}$.

Zadanie 11

- Rzucamy idealną kostką sześcienną trzy razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pięć oczek wypadnie dokładnie dwa razy?
- Rzucamy pięć razy źle wyważoną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia losowego: wypadną dokładnie dwa orły? Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w jednym rzucie wynosi 0.3.