PERMUTACJE

Z1. Oblicz:

a) $\frac{8!}{6!}$, b) $\frac{6! \cdot 5!}{5! \cdot 4!}$, c) $\frac{9! - 7!}{7! \cdot 3!}$, d) $\frac{25! + 26!}{26! - 25!}$

ODP.

a) 56; b) 30; c) $11\frac{5}{6}$; d) $1\frac{2}{25}$.

Z2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{n!}$

ODP.

a) $n^2 - n$; b) $n + 1$.

Z3. Sprawdź czy prawdziwa jest równość:

$$\frac{[(n+1)!]^2}{n! \cdot (n-1)!} = n\,(n+1)^2.$$

ODP. Dana równość jest prawdziwa.

Z4. Ankieta złożona ma być z trzech pytań: A, B i C. Na ile sposobów można ją ułożyć zmieniając tylko kolejność pytań?
ODP. Jest 6 możliwych sposobów.

Z5. Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4?
ODP. Są 24 takie liczby.

Z6. Na ile sposobów może usiąść na ławce 6 osób?
ODP. 6 osób może usiąść na 720 różnych sposobów.

Z7. Ile liczb siedmiocyfrowych można zapisać za pomocą cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?
ODP. Wszystkich możliwych liczb siedmiocyfrowych jakie można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 jest 4320.

Z8. Liczba permutacji n elementów jest 30 razy mniejsza od liczby permutacji n + 2 elementów. Oblicz n.

ODP. n = 4

Z9. Na ile różnych sposobów może usiąść 8 osób przy okrągłym stole, jeżeli:
a) uwzględniamy miejsca zajmowane przy stole (krzesła są ponumerowane),
b) uwzględniamy tylko rozmieszczenie osób względem siebie.
ODP.

a) Jest 40320 możliwości.
b) Jest 5040 możliwości.

Z10. Należy ustawić pięć osób w szeregu tak, aby:
a) osoby X i Y stały obok siebie,
b) pomiędzy osobami X i Y stały dwie osoby.
Na ile sposobów można to zrobić w każdym z wymienionych przypadków?
ODP.

a) Wszystkich możliwych ustawień takich, że osoby X i Y stoją obok siebie, jest 48.
b) Wszystkich możliwych ustawień takich, że pomiędzy osobami X i Y stoją dwie osoby, jest 24.

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

Z1. Dany jest zbiór X = {1, 2, 3}. Wypisz wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach, jakie można utworzyć z elementów zbioru X. Ile jest wszystkich możliwości?
ODP. Wszystkich możliwości jest 6.

Z2. Szyfr do sejfu składa się z czterech różnych cyfr od 1 do 9 włącznie. Ile jest wszystkich możliwości, jeżeli pierwsza cyfra jest większa od 6?
ODP. Wszystkich możliwych szyfrów spełniających warunki zadania jest 1008.

Z3. Z urny, w której znajduje się 9 ponumerowanych kul od 1 do 9 włącznie, losujemy kolejno bez zwracania 3 kule. Zapisując wyniki losowań tworzymy liczby trzycyfrowe. Ile można utworzyć w ten sposób liczb mniejszych od 780?
ODP. Wszystkich liczb trzycyfrowych spełniających warunki zadania jest 378.

Z4. W finale konkursu matematycznego bierze udział 10 uczestników. Ile jest możliwości zajęcia przez nich trzech pierwszych miejsc, jeżeli uwzględniamy kolejność (I, II i III miejsce)?
ODP. Wszystkich możliwości jest 720.

Z5. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez 5?
ODP. Wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez 5, jest 5712.

Z6. W pewnej fabryce postanowiono wprowadzić identyfikatory dla pracowników w niej zatrudnionych. Numer każdego identyfikatora ma być inny. Składać ma się on w kolejności: najpierw z dwóch różnych liter ze zbioru {A, B, C, D}, a następnie z trzech różnych cyfr spośród wszystkich możliwych (zero może stanowić pierwszą z trzech cyfr). Czy każdy pracownik tej fabryki otrzymałby identyfikator, gdyby liczba wszystkich zatrudnionych wynosiła 8600?
ODP. W przypadku zatrudnienia 8600 pracowników, wszyscy zatrudnieni dostaną identyfikatory.

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

Z1. Ile różnych wyników możemy otrzymać rzucając trzy razy monetą?
ODP. Wszystkich możliwych wyników trzykrotnego rzutu monetą jest 8.

Z2. Na ile różnych sposobów mogą 4 osoby wsiąść do tramwaju złożonego z dwóch wagonów?
ODP. Wszystkich możliwości rozmieszczenia pasażerów w tym tramwaju jest 16.

Z3. Na ile różnych sposobów można włożyć pięć różnych przedmiotów do trzech szuflad?
ODP. Pięć różnych przedmiotów można umieścić w trzech szufladach na 243 różne sposoby.

Z4. Do windy w dziesięciopiętrowym budynku, stojącej na parterze, wsiadło 6 osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z windy na poszczególnych piętrach?
ODP. Sześciu pasażerów może wysiąść z windy dziesięciopiętrowego budynku na 1 000 000 różnych sposobów.

Z5. W urnie znajduje się 8 ponumerowanych kul od 1 do 8. Losujemy kolejno 3 kule, zwracając je za każdym razem do urny po zapisaniu ich numerów. Ile liczb trzycyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?
ODP. Wszystkich możliwych liczb spełniających warunki zadania jest 512.

Z6. Ile różnych wyników możemy otrzymać przy:
a) sześciokrotnym rzucie monetą,
b) rzucie sześcioma monetami o różnych nominałach?
ODP. Rzucając sześciokrotnie monetą możemy otrzymać 64 różne wyniki. Rzucając sześcioma monetami o różnych nominałach możemy otrzymać tyle samo różnych wyników, ile w przypadku sześciokrotnego rzutu monetą, tj. 64.

Z7. Rzucamy cztery razy kostką do gry, zapisując liczbę oczek uzyskanych w kolejnych rzutach. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?
ODP. Różnych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać 1296.

Z8. Ile różnych sześciocyfrowych numerów telefonów może zaproponować centrala swoim abonentom?
ODP. Wszystkich możliwych sześciocyfrowych numerów telefonicznych jest 900 000.

Z9. Ile można utworzyć wszystkich parzystych liczb pięciocyfrowych?
ODP. Wszystkich parzystych liczb pięciocyfrowych jest 45000.

KOMBINACJE

Z1. Oblicz:

a) $\binom{6}{4}$, b) $\binom{15}{15}$, c) $\binom{n}{1}$ dla $n \in \mathrm{N}$, d) $\binom{n}{0}$ dla $n \in \mathrm{N}$,
e) $\binom{n}{n-1}$ dla $n \in \mathrm{N}_+$.

ODP.

a) 15, b) 1, c) n, d) 1, e) n.

Z2. W urnie znajdują się 4 kule: biała, czarna, niebieska i zielona. Losujemy bez zwracania 2 kule. Ile możemy otrzymać różnych wyników losowania?
ODP. Losowanie opisane w zadaniu może zakończyć się 6 różnymi wynikami.

Z3. W urnie znajduje się 20 kul ponumerowanych od 1 do 20. Losujemy bez zwracania 3 kule. Ile jest możliwości wylosowania wszystkich 3 kul o numerze, będącym liczbą parzystą?
ODP. Wszystkich możliwości wylosowania 3 kul o numerach będących liczbami parzystymi spośród kul ponumerowanych od 1 do 20 jest 120.

Z4. Oblicz:

a) C_5^5, b) C_4^2, c) $C_{16}^0 + C^1{}_{20}$, d) $C_9^{\,7} \cdot C_5^{\,4}$.

ODP.

a) 1; b) 6; c) 21; d) 180.

Z5. Ile jest wszystkich odcinków łączących wierzchołki ośmiokąta wypukłego?
ODP. Wszystkich odcinków jest 28.

Z6. W klasie jest 24 uczniów, w tym 10 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać 2-osobową delegację złożoną z uczennicy i ucznia?
ODP. Delegację tej klasy złożoną z uczennicy i ucznia można wybrać na 140 sposobów.

Z7. Ile nastąpi uścisków dłoni, gdy spotka się 10-osobowa grupa znajomych, zakładając, że wita się każdy z każdym?
ODP. Przy powitaniu nastąpi 45 uścisków dłoni.

Z8. Z talii liczącej 52 karty losujemy bez zwracania pięć kart. Ile istnieje możliwych wyników losowania, w których otrzymamy dokładnie dwa kiery?

ODP. Możliwych wyników losowania 5 kart z talii, tak aby 2 z nich były kierami jest 712 842.

Z9. W urnie znajduje się 10 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 4 kule. Ile jest możliwych wyników losowania, w których dokładnie trzy kule będą tego samego koloru?
ODP. Wszystkich sposobów wylosowania czterech kul, wśród których trzy będą jednego koloru, jest w tym przypadku 920.