

Podstawy nauk przyrodniczych  
Matematyka

**Zbior y**

dr Katarzyna Kluzek

Zakład Genetyki Molekularnej Człowieka

tel. 61 829 58 33

[katarzyna.kluzek@amu.edu.pl](mailto:katarzyna.kluzek@amu.edu.pl)

Pokój 1.117

<http://dhmg.amu.edu.pl/>

# Niech będą dane dwa dowolne zbiory $X$ i $Y$

- Funkcją  $f$  jednej zmiennej nazywamy dowolne przyporządkowanie każdemu elementowi  $x \in X$  dokładnie jednego elementu  $y \in Y$ .
- Jeżeli przyporządkujemy każdemu elementowi  $x \in X$  dokładnie jeden element  $y \in Y$ , to mówimy że w zbiorze  $X$  została określona funkcja  $f$  i że  $y$  jest funkcją  $x$ .
- Fakt, że  $y$  jest funkcją  $x$  zapisujemy następująco:

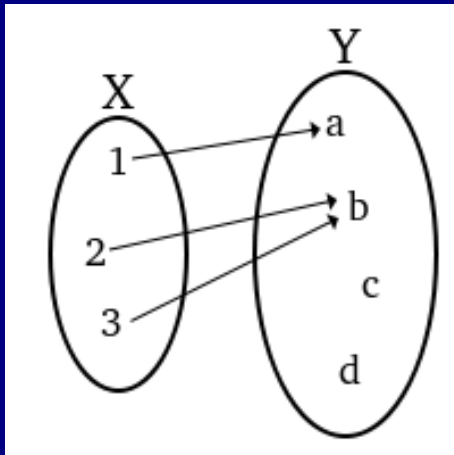
$$y = f(x)$$

lub

$$f : X \rightarrow Y.$$

# Dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji

- Zbiór  $X$  nazywamy **dziedziną funkcji**.
- Elementy zbioru  $X$  nazywamy **argumentami funkcji**.
- Zbiór  $Y$  nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**.
- **Zbiór wartości funkcji** to zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez funkcję.



Rysunek : Przykładowa funkcja  $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ .  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ ,  $f(3) = b$ . Dziedzina  $X = \{1, 2, 3\}$ , przeciwdziedzina  $Y = \{a, b, c, d\}$ , zbiór wartości funkcji to  $\{a, b\}$  (na podstawie Wikipedii).

# Funkcję określamy

- Przez podanie wzoru:

- $y = x^2 - 1$ .

- $y = \sqrt{x}$ .

- Tabelarycznie:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

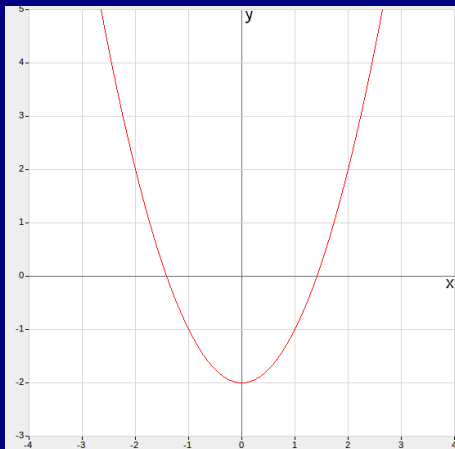
Tablica : Tablica funkcji  $y = 2x$  dla wybranych argumentów.

- Słownie:

- Funkcja przyporządkowuje liczbom parzystym liczbę 0, a liczbom nieparzystym liczbę 1.

# Wykres funkcji jednej zmiennej

- Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, których odciętymi są argumenty funkcji a rzędnymi wartości funkcji.



Rysunek : Fragment wykresu funkcji  $y = x^2 - 2$ .

# Miejscem zerowym funkcji $f : X \rightarrow Y$

- Nazywamy taki argument  $x_0 \in X$ , dla którego wartość funkcji jest równa 0, czyli  $f(x_0) = 0$ .



# Wartość najmniejsza i największa funkcji

- Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  przyjmuje wartość największą  $y_{\max} = f(x_0)$  dla pewnego  $x_0 \in X$  wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $x \in X$  zachodzi nierówność  $f(x) \leq y_{\max}$ .
- Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  przyjmuje wartość najmniejszą  $y_{\min} = f(x_0)$  dla pewnego  $x_0 \in X$  wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $x \in X$  zachodzi nierówność  $f(x) \geq y_{\min}$ .

# Wartość najmniejsza i największa funkcji w przedziale $A$

- Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  przyjmuje wartość największą  $y_{\max} = f(x_0)$  dla pewnego  $x_0 \in A$  wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $x \in A$  zachodzi nierówność  $f(x) \leq y_{\max}$ .
- Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  przyjmuje wartość najmniejszą  $y_{\min} = f(x_0)$  dla pewnego  $x_0 \in A$  wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $x \in A$  zachodzi nierówność  $f(x) \geq y_{\min}$ .

# Monotoniczność funkcji

- Funkcję  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy **rosnącą** w zbiorze  $A \subseteq X$ , jeżeli dla dowolnych  $x_1, x_2 \in A$  zachodzi zależność:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Funkcję  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy **malejącą** w zbiorze  $A \subseteq X$ , jeżeli dla dowolnych  $x_1, x_2 \in A$  zachodzi zależność:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

# Funkcja wielomianowa

- To funkcja przedstawiona wzorem:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0,$$

gdzie  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  są stałymi współczynnikami,  $n$  jest liczbą nieujemną.

- Przypadki szczególne:

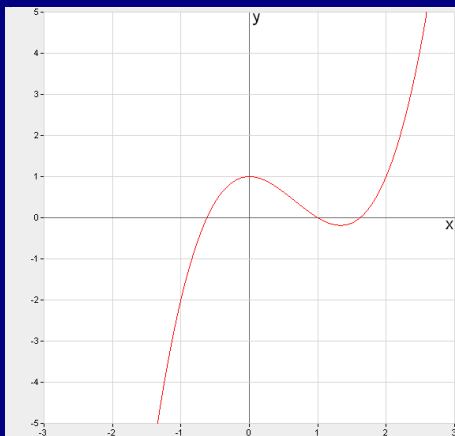
- Funkcja liniowa:

$$y = ax + b.$$

- Funkcja kwadratowa:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

- Dziedziną funkcji wielomianowej jest zbiór liczb rzeczywistych.



Rysunek : Fragment wykresu funkcji  $y = x^3 - 2x^2 + 1$ .

# Funkcja wymierna

- To funkcja zadana wzorem:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0},$$

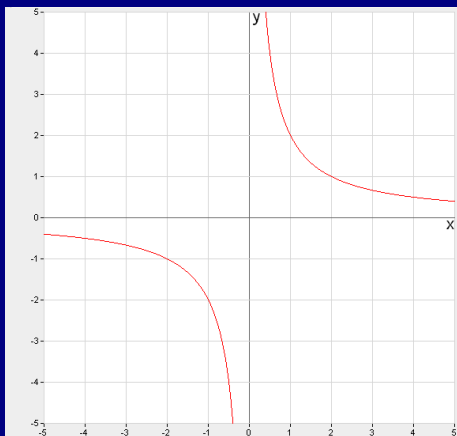
gdzie  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  oraz  $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$  są stałymi współczynnikami.

- Przypadki szczególne:

- Funkcja zadana wzorem:

$$y = \frac{a}{x}.$$

- Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem tych liczb, dla których mianownik jest równy zeru.



Rysunek : Fragment wykresu funkcji  $y = \frac{2}{x}$ .

# Funkcja potęgowa

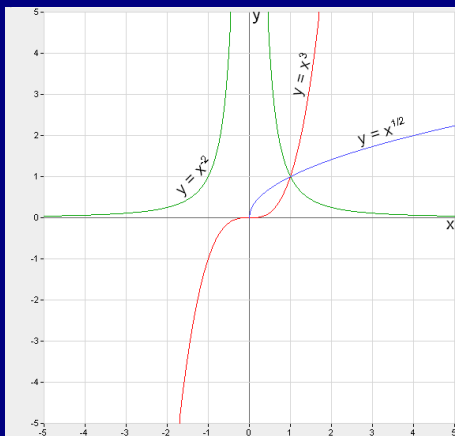
- To funkcja postaci:

$$y = x^n,$$

gdzie  $n$  jest dowolną stałą liczbą rzeczywistą.

- Przypadki szczególne:
  - Jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną, to otrzymujemy funkcję wielomianową.
  - Jeżeli  $n$  jest liczbą całkowitą ujemną, to dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych bez zera.
  - Jeżeli  $n$  jest ułamkiem, to otrzymujemy funkcję pierwiastkową.





Rysunek : Fragmenty wykresów funkcji  $y = x^3$ ,  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = x^{-2}$ .

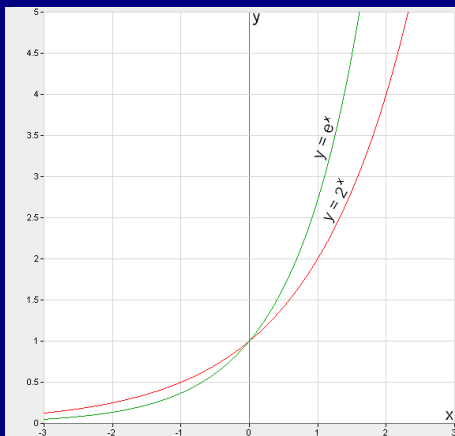
# Funkcja wykładnicza

- To funkcja zadana wzorem:

$$y = a^x,$$

gdzie  $a$  jest liczbą dodatnią różną od jedności.

- Przypadki szczególne:
  - Jeżeli  $a = e$ , to funkcję wykładniczą nazywamy eksponencjalną i oznaczamy  $\exp(x)$ .
- Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.



Rysunek : Fragmenty wykresów funkcji  $y = 2^x$  oraz  $y = e^x$ .

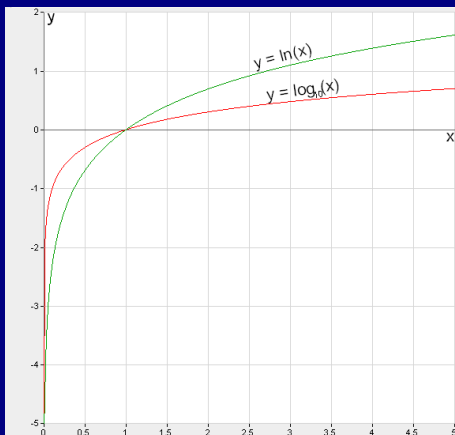
# Funkcja logarytmiczna

- To funkcja zadana wzorem:

$$y = \log_a x,$$

gdzie  $a$  jest liczbą dodatnią różną od jedności.

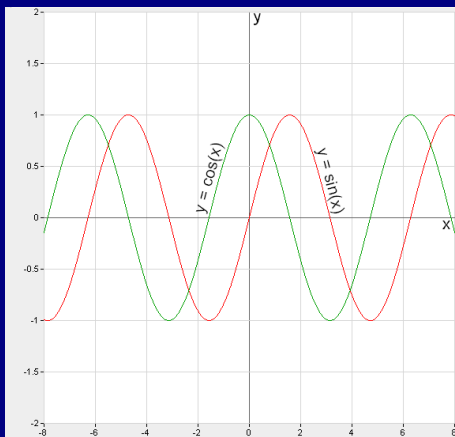
- Przypadki szczególne:
  - Jeżeli  $a = e$ , to funkcję logarytmiczną nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy  $\ln(x)$ .
- Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.



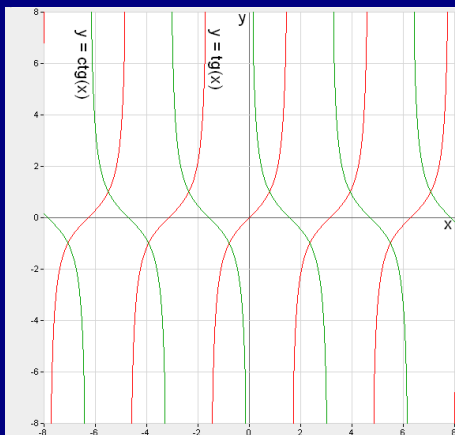
Rysunek : Fragmenty wykresów funkcji  $y = \log_{10}(x)$  i  $y = \ln(x)$ .

# Funkcje trygonometryczne

- Sinus:  $y = \sin(x)$ . Dziedziną funkcji sinus jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Kosinus:  $y = \cos(x)$ . Dziedziną funkcji kosinus jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Tangens:  $y = \operatorname{tg}(x)$ . Dziedziną funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem argumentów postaci  $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ .
- Kotangens:  $y = \operatorname{ctg}(x)$ . Dziedziną funkcji kotangens jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem argumentów postaci  $k\pi$ .



Rysunek : Fragmenty wykresów funkcji  $y = \sin(x)$  i  $y = \cos(x)$ .



Rysunek : Fragmenty wykresów funkcji  $y = \operatorname{tg}(x)$  i  $y = \operatorname{ctg}(x)$ .



# Układ współrzędnych na płaszczyźnie

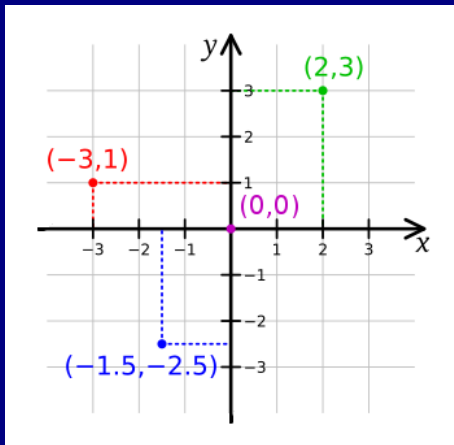
- wykorzystuje dwie liczby (współrzędne) w celu określenia pozycji dowolnego punktu na płaszczyźnie.

# Układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie

- To układ współrzędnych, w którym zadane są:
  - Punkt zwany początkiem układu współrzędnych, którego obie współrzędne są równe zeru, oznaczany literą  $O$  lub cyfrą  $0$ .
  - Dwie prostopadłe osie liczbowe oznaczane jako  $x$  oraz  $y$ .

# Współrzędne punktu P

- Fakt że punkt P ma współrzędne  $x$  oraz  $y$  zapisujemy  $P = (x, y)$ .



Rysunek : Wycinek prostokątnego układu współrzędnych Oxy. Źródło: Wikipedia.

Niech będą dane dwa dowolne zbiory  $X \times Y$  i  $Z$

- Funkcją  $f$  dwóch zmiennych nazywamy dowolne przyporządkowanie każdemu elementowi  $(x, y) \in X \times Y$  dokładnie jednego elementu  $z \in Z$ .
- Jeżeli przyporządkujemy każdemu elementowi  $(x, y) \in X \times Y$  dokładnie jeden element  $z \in Z$ , to mówimy że w zbiorze  $X \times Y$  została określona funkcja  $f$  i że  $z$  jest funkcją  $(x, y)$ .
- Fakt, że  $z$  jest funkcją  $(x, y)$  zapisujemy następująco:

$$z = f(x, y)$$

lub

$$f : X \times Y \rightarrow Z.$$

# Dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji

- Zbiór  $X \times Y$  nazywamy **dziedziną funkcji**.
- Elementy zbioru  $X \times Y$  nazywamy **argumentami funkcji**.
- Zbiór  $Z$  nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**.
- **Zbiór wartości funkcji** to zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez funkcję.

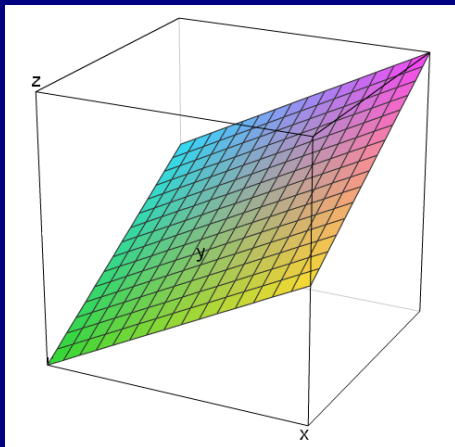
# Przykłady funkcji dwóch zmiennych

- Dodawanie liczb naturalnych.
- Mnożenie liczb całkowitych.
- Dzielenie liczb liczb rzeczywistych.
- Pole powierzchni prostokąta.

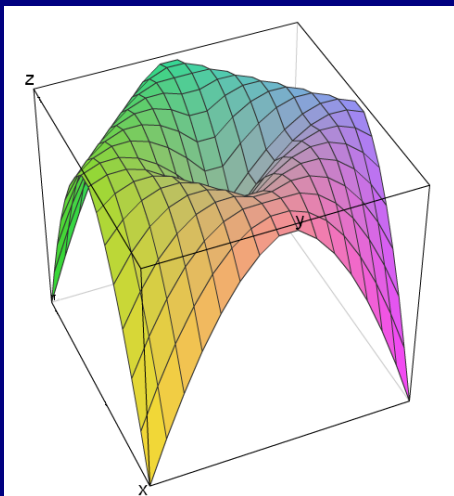
# Wykres funkcji dwóch zmiennych

- Zbiór wszystkich punktów  $(x, y, z)$  przestrzeni 3D takich, że  $(x, y) \in X \times Y$  oraz  $z = f(x, y)$ .





Rysunek : Fragment wykresu funkcji  $z = x + y$ .



Rysunek : Fragment wykresu funkcji  $z = (|x| + |y|)\cos(|x| + |y|)$ .

Dziękuję za uwagę

Zakład Genetyki Molekularnej Człowieka

tel. 61 829 58 33

katarzyna.kluzek@amu.edu.pl

Pokój 1.117

<http://dhmg.amu.edu.pl/>